Μαθημα 9ο | No. | Date 22/3/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Ασκηση 7

Αν $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ και $\vec{a}\cdot\vec{b}=1/2$. Να απλοποιηθεί η παρασταση $A\cdot B$, οπου $A=[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}]\cdot\vec{a}$ και $B=[\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}))]\times\vec{a}$

$$\boxed{\begin{array}{c}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{y}=(\vec{a}\cdot\vec{y})\cdot\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{y})\cdot\vec{a}\\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{y})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{y}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{y}\end{array}}$$

$$A=[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}]\cdot\vec{a}=$$

$$=((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

$$B=[\vec{a}\times((\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a})]\times\vec{a}=\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\right]\times\vec{a}=$$

$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}-\frac{1}{2}\overset{0}{\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}}\right)\times\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}=$$

(*) $\vec{a}\times\vec{a}=0$ γιατι $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=0$ δυο γραμμες ιδιες

$$=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$ {Δεν μπορω να το προχωρησω αλλο γιατι $\vec{a},\vec{b}$ αγνωστα}

Οποτε $A\cdot B=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{a}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δινονται μοναδιαια $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τετοια ωστε ανα δυο εχουν ισες γωνιες. Να εξετασετε αν τα διανυσματα $\vec{a}+\vec{b}+\vec{\gamma}$ και $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{\gamma})$ ειναι παραλληλα

(ή συγγραμικα)

(ή Γ.Ε)

Κανω την γεωμετρια αλγεβρα.

Αρκει να δουμε πως συμπεριφερεται το εξωτερικο γινομενο

$$\underbrace{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{\gamma})}_{1o}\times\Big[\underbrace{(\vec{a}-\vec{b})}_{2o}\times\underbrace{(\vec{a}-\vec{\gamma})}_{3o \text{ διανυσμα}}\Big] =$$

Οταν εχω εσωτερικο ολο ειναι καλα, κανω πραξεις

Αν το βγαλω 0 τελειωσα

$$=\big[(\vec{a}+\vec{b}+\vec{\gamma})\cdot(\vec{a}-\vec{\gamma})\big]\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\big[(\vec{a}+\vec{b}+\vec{\gamma})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\big]\cdot(\vec{a}-\vec{\gamma}) = (*)$$

(αριθμος x διανυσμ.) − (αριθμ x διαν)

Δεν μπορω να βγαλω κατευθειαν 0 για αυτο + εχω με αλλη σειρα τις πραξεις

Απο υποθεση ισχυει

$\cos(\vec{a},\vec{\gamma}) = \cos(\vec{a},\vec{b}) = \cos(\vec{b},\vec{\gamma})$ και $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{\gamma}|=1$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) = \cos(\vec{a},\vec{b})\\
\vec{b}\cdot\vec{\gamma} &= |\vec{b}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\cos(\vec{b},\vec{\gamma}) = \cos(\vec{b},\vec{\gamma})\\
\vec{a}\cdot\vec{\gamma} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{\gamma}) = \cos(\vec{a},\vec{\gamma})
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{\gamma} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma}$$

Οποτε $(*) = (\cancel{\vec{a}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{\gamma}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{b}\cdot\vec{\gamma}} + \cancel{\vec{\gamma}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}})(\vec{a}-\vec{b}) -$

$- (\cancel{\vec{a}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{b}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{\gamma}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{\gamma}\cdot\vec{b}})(\vec{a}-\vec{\gamma}) = 0\,(\vec{a}-\vec{b}) - 0\cdot(\vec{a}-\vec{\gamma}) =$

$= \vec{0}$

No. Date

Ασκηση 9

Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ και εστω $\vec{u} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\times\vec{a}$

Να δειχθει οτι $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{\gamma}, \vec{u} \rangle$

ή $\vec{a}\cdot\vec{u} = \vec{b}\cdot\vec{u} = \vec{\gamma}\cdot\vec{u}$ διαφορετικος συμβολισμος

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\times\vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\times\vec{a} \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}\times\vec{b} \rangle}_{\text{μεικτά γινομενα}}^{0} + \langle \vec{a}, \vec{b}\times\vec{\gamma} \rangle + \cancel{\langle \vec{a}, \vec{\gamma}\times\vec{a} \rangle}^{0} - \cancel{\langle \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b} \rangle}^{0} - \cancel{\langle \vec{b}, \vec{b}\times\vec{\gamma} \rangle}^{0} - \langle \vec{b}, \vec{\gamma}\times\vec{a} \rangle \overset{\circledast}{=}$$

(*) $\langle \vec{a}, \vec{a}\times\vec{b} \rangle = \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$$\begin{array}{c} \vec{a}\rightarrow \\ \vec{a}\rightarrow \\ \vec{b}\rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(*) Στο μεικτο γινομενο οταν εχω δυο ιδια διανυσματα τοτε μου κανει 0

αλλος συμβολισμος μεικτου γινομενου

$$\circledast = \langle \vec{a}, \vec{b}\times\vec{\gamma} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{\gamma}\times\vec{a} \rangle = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) - (\vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{a}) \underset{(**)}{=} 0$$

(**) γιατι $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = (\vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{a}) = (\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{b})$

ακολουθει κυκλικη κινηση

No. Date

Ασκηση 10

Εστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τετοια ωστε $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Ν.δ.ο

(i) $(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$

(ii) $\vec{a}\times\vec{\beta} = \vec{\beta}\times\vec{\gamma} = \vec{\gamma}\times\vec{a}$

(i) $(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \langle \vec{a}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma}\rangle \overset{\vec{\gamma}=-\vec{a}-\vec{\beta}}{=\!=\!=} \langle \vec{a}\times\vec{\beta}, -\vec{a}-\vec{\beta}\rangle =$

Αλγεβρικα

$= \langle \vec{a}\times\vec{\beta}, -\vec{a}\rangle + \langle \vec{a}\times\vec{\beta}, -\vec{\beta}\rangle = -\langle \vec{a}\times\vec{\beta}, \vec{a}\rangle - \langle \vec{a}\times\vec{\beta}, \vec{\beta}\rangle = 0$

{μεικτο γινομενο με δυο ιδια διανυσματα}

Γεωμετρικα

$\vec{a}\times\vec{\beta} \perp \vec{a}$ αρα $(\vec{a}\times\vec{\beta})\cdot\vec{a} = 0$

$\vec{a}\times\vec{\beta} \perp \vec{\beta}$ αρα $(\vec{a}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\beta} = 0$

(ii) $\vec{a}\times\vec{\beta} - \vec{\beta}\times\vec{\gamma} = \vec{a}\times\vec{\beta} + \vec{\gamma}\times\vec{\beta} = (\vec{a}+\vec{\gamma})\times\vec{\beta} \overset{-\vec{\beta}=\vec{a}+\vec{\gamma}}{=\!=\!=}$

$-(\vec{\beta}\times\vec{\beta}) = 0$

γιατι ειναι μια οριζουσα το $\vec{\beta}\times\vec{\beta}$ με δυο ιδιες γραμμες.

No. Date

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνονται τα $\vec{a}=(1,1,-1)$ και $\vec{b}=(1,-1,1)$. Να βρεθεί $\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$: "τα $\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}$ να έχουν ίδιο μέτρο, να σχηματίζουν ανά δύο ίσες γωνίες" και τα $\{\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}\}$ δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς

σημαίνει ότι $(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma})>0$

Σημαίνει $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\vec{b}\cdot\vec{\gamma}$ (1)

Το είδαμε και στη προηγούμενη άσκηση

Έστω $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\in\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=(1,1,-1)(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3\\ \vec{b}\cdot\vec{\gamma}=(1,-1,1)(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3\end{array}\right\}\xrightarrow{(1)}\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\vec{b}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow$$

$$\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3\Rightarrow 2\gamma_2=2\gamma_3\Rightarrow\boxed{\gamma_2=\gamma_3}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,1,-1)(1,-1,1)=1+(-1)+(-1)=-1$$

Άρα $\overset{\lambda\acute{o}\gamma\omega}{(1)}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=-1\Rightarrow\gamma_1+\cancel{\gamma_2}-\cancel{\gamma_3}=-1\Rightarrow\boxed{\gamma_1=-1}$

Γνωρίζουμε ότι $|\vec{\gamma}|=|\vec{b}|=|\vec{a}|$ ή $\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{(-1)^2+\gamma_2^2+\gamma_2^2}=\sqrt{3}\Rightarrow 1+2\gamma_2^2=3\Rightarrow 2\gamma_2^2=2\Rightarrow\gamma_2^2=1\Rightarrow$$

$\gamma_2=1$ ή $\gamma_2=-1$

Άρα $\vec{\gamma}=(-1,1,1)$ ή $\vec{\gamma}=(-1,-1,-1)$

Αφού σύστημα δεξιόστροφο $\Rightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma})=0$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{vmatrix}>0\Leftrightarrow\gamma_2+\gamma_3=0\Leftrightarrow\gamma_2=-\gamma_3\quad\Leftrightarrow\gamma_2=\gamma_3=-1$$

μια φορά βάζω $\gamma_2=\gamma_3=1$ και μια $\gamma_2=\gamma_3=-1$ και ελέγχω ποια ορίζουσα είναι θετική.

πράξεις ...... Βγάζουμε ότι τελικά $\vec{\gamma}=(-1,-1,-1)$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Εστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$. Νδο:

(i) $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times(\vec{\gamma}\times\vec{\delta}) = (\vec{a},\vec{\beta},\vec{\delta})\cdot\vec{\gamma} - (\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma})\cdot\vec{\delta}$

$$(\vec{a}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})) = (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta} - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{\beta})\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{\delta}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{\gamma} & \vec{a}\cdot\vec{\delta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} & \vec{\beta}\cdot\vec{\delta} \end{vmatrix}$

{αλλα για τους τυπους δεν κανουμε αποδειξη}

$|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ S.O.S $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

ΑΣΚΗΣΗ 13

$\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μοναδιαια και σχηματιζουν ανα δυο γωνια $\varphi = \pi/3$

Να υπολογισθεί η $A = (\underbrace{\vec{a}}_{\vec{a}}\times\underbrace{(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{\beta}))}_{\vec{\beta}})\times(\underbrace{\vec{\beta}}_{\vec{\gamma}}\times\underbrace{\vec{\gamma}}_{\vec{\delta}})$

Λαμβανω με τυπους.

$$A = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{\beta} & \vec{a}\cdot\vec{\gamma} \\ \underbrace{(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{\beta}))\cdot\vec{\beta}}_{\text{αριθμος}} & \underbrace{(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{\beta}))\cdot\vec{\gamma}}_{\text{αριθμος}} \end{vmatrix} = \cancel{\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{\beta} & \vec{a}\cdot\vec{\gamma} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \cancel{0} \quad (**)$$

→ ΟΧΙ

→ $\vec{a}\cdot((\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta})$

→ $((\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{\beta})$

(*) Οταν αλλαζω εσωτερικο με εξωτερικο γινομενο πρεπει να αλλαζω και την παρενθεση γιατι αλλιως θα εχω αριθμο × διανυσμα που δεν γινεται!
Ενω στο μεικτο γινομενο δεν εχω προβλημα με την παρενθεση

→ $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \cancel{|\vec{a}|}^{1}\cdot\cancel{|\vec{\beta}|}^{1}\cdot\cos(\vec{a},\vec{\beta}) = \cos(\pi/3) = 1/2$

(**) πραξεις $= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -3/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$